

Technische Universität Braunschweig

Institut für Programmierung und Reaktive Systeme

Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ursula Goltz / Dr. Werner Struckmann

27. September 2006

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fachrichtung:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matrikelnummer:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Kennnummer:

--	--	--

Note:

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens 37 von 74 möglichen Punkten erreicht haben. Sie dürfen keine Unterlagen verwenden. Dies schließt Taschenrechner ein. Schreiben Sie mit Tinte oder Kugelschreiber in blauer oder schwarzer Farbe. Benutzen Sie für Ihre Lösungen die beigegefügt Blätter.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
max. Punkte	8	10	10	14	12	20	74
Punkte							

- Bitte prägen Sie sich Ihre Kennnummer gut ein. Aus Datenschutzgründen wird das Klausurergebnis nur unter dieser Kennnummer bekannt gegeben. Aus den gleichen Gründen können Ergebnisse weder telefonisch noch per E-Mail mitgeteilt werden.
- Die Ergebnisse der Klausur können Sie ab *Freitag, dem 6. Oktober 2006*, auf der WWW-Seite zu dieser Veranstaltung erfahren.
- Ihre Klausur können Sie am *Freitag, den 6. Oktober 2006*, von 11:00 bis 13:00 Uhr im Raum 251 des Informatikzentrums einsehen.

Aufgabe 1: (*Binäre Suchbäume*) Angenommen, es wurden Zahlen zwischen 1 und 1000 in einem binären Suchbaum gespeichert. Dann wurde nach der Zahl 333 gesucht. Welche der folgenden Sequenzen können nicht durchlaufen worden sein?

- a) 2, 255, 403, 390, 320, 348, 340, 333.
- b) 888, 111, 777, 666, 222, 555, 444, 333.
- c) 783, 153, 720, 245, 733, 300, 340, 333.
- d) 950, 850, 243, 499, 275, 375, 299, 333.

Geben Sie für jede Sequenz einzeln an, ob sie durchlaufen worden sein kann oder nicht.

8 Punkte

Lösung zu Aufgabe 1:

Aufgabe 2: (*Asymptotische Notation*) Bitte kreuzen Sie an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Kein Kreuz bzw. zwei Kreuze bedeuten 0 Punkte. Die minimale Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

	wahr	falsch
$5n^2 + 50n + 500 = O(n^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n^2 + 50n + 500 = \Theta(n^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n^2 + 50n + 500 = \Omega(n^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n^2 + 50n + 500 = o(n^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$5n^2 + 50n + 500 = \omega(n^2)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3^n = O(2^n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\log_2 2n + \log_2 3n = O(\log n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sin^2(x) = O(1)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{n+1} = O(\sqrt{n})$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2^{n+1} = O(2^n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

10 Punkte

Aufgabe 3: (*Listen, Bäume, Hashverfahren und Graphen*) Bitte kreuzen Sie an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Kein Kreuz bzw. zwei Kreuze bedeuten 0 Punkte. Die minimale Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

	wahr	falsch
Ein Keller ist eine Liste, auf die nur an einem Ende zugegriffen werden kann.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Eine Schlange ist eine Liste, auf die nur an einem Ende zugegriffen werden kann.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Eine Deque ist eine Liste, auf die nur an einem Ende zugegriffen werden kann.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In einem binären Suchbaum kann das minimale Element in der Zeit $O(\log n)$ bestimmt werden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In einem Rot-Schwarz-Baum haben alle Pfade von der Wurzel zu einem Blatt die gleiche Länge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In einem B -Baum der Ordnung t , $t \geq 2$, besitzt jeder Knoten maximal $2t - 1$ Schlüssel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In einem Max-Heap befindet sich das größte Element stets an der Wurzel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Beim Open-Hashing-Verfahren können keine Kollisionen auftreten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Adjazenzmatrix eines Graphen mit n Knoten und m Kanten besteht aus n Zeilen und m Spalten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jeder gerichtete azyklische Graph besitzt eine topologische Sortierung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

10 Punkte

Aufgabe 4: (*Sortierverfahren, imperative Algorithmen*) Gegeben seien ein Feld ganzer Zahlen $a[0..n-1]$, $n \geq 1$, und der folgende imperative Algorithmus, der dieses Feld sortiert.

```
for  $j \leftarrow n - 2$  downto 0 do
  (*);
   $k \leftarrow a[j]$ ;
   $i \leftarrow j + 1$ ;
  while  $i \leq n - 1$  und  $a[i] < k$  do
     $a[i - 1] \leftarrow a[i]$ ;
     $i \leftarrow i + 1$ ;
  end
   $a[i - 1] \leftarrow k$ ;
end
```

- Beschreiben Sie die diesem Algorithmus zugrunde liegende Idee.
- Gegeben sei das Feld $a = [5, 3, 4, 0, 2, 1]$. Geben Sie für jeden Durchlauf der äußeren Schleife den Inhalt von a an der Stelle (*) an.
- Wie oft wird der Test $i \leq n - 1$ und $a[i] < k$ der While-Schleife im ungünstigsten Fall ausgeführt. Wann tritt dieser Fall ein?
- Ist der Sortieralgorithmus stabil? Begründen Sie Ihre Aussage.

14 Punkte

Lösung zu Aufgabe 4:

Lösung zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5: (*AVL-Bäume*)

- a) Geben Sie die Definition eines AVL-Baums an.
- b) Fügen Sie die Zahlen 6, 4, 8, 2, 5 und 1 in dieser Reihenfolge mit dem in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. Zeichnen Sie den Baum nach dem Einfügen jeder Zahl. Erläutern Sie ggf. notwendige Rotationen.

12 Punkte

Lösung zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6: (Komplexität und Korrektheit von Algorithmen)

a) Gegeben sei das folgende Programmstück:

```
x ← 0;
for i ← -1 to n - 2 do
  for j ← -5 to 5 · i - 1 do
    x ← x + 1;
  end
end
```

Welchen Wert besitzt die Variable x nach Ausführung dieser Anweisung? Geben Sie den genauen Wert in Abhängigkeit von n ohne Verwendung des Summenzeichens Σ an.

b) Für die Laufzeit a_n eines rekursiven Algorithmus wurde in Abhängigkeit von der Problemgröße n die Rekurrenzgleichung

$$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 2, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 6$$

gefunden. Lösen Sie die Rekurrenzgleichung.

c) Für die Laufzeit $T(n)$ eines Teile-und-Beherrsche-Algorithmus wurde in Abhängigkeit von der Problemgröße n die Rekurrenzgleichung

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

gefunden. Lösen Sie diese Gleichung mithilfe des Mastertheorems.

d) Gegeben seien der Algorithmus S

```
t ← 1;
y ← 0;
while t ≤ x do
  t ← 2t;
  y ← y + 1;
end
y ← y - 1;
```

und die Vorbedingung $x \geq 1$. Welchen Wert besitzt die Variable y nach Ausführung des Algorithmus? Formulieren Sie eine entsprechende Nachbedingung q . Geben Sie eine Schleifeninvariante an, die zum Nachweis der partiellen Korrektheit von S bezüglich der Vorbedingung $x \geq 1$ und der Nachbedingung q geeignet ist.

20 Punkte

Lösung zu Aufgabe 6: