

Lineare Algebra

Klausur WS 06/07

Seite 166

Aufgabe 1

LU-Zerlegung

- U - obere Dreiecksmatrix mit Gauß
- keine Zeilen vertauschen
- keine Skalarmultiplikation

Aufgabe 2

	U
L	

2.1

$$L \cdot U = A$$

2.2 Determinante

obere Dreiecksmatrix(U)

$$(-1)^n \cdot \underbrace{(a_{11} + a_{22} + a_{33})}_{\text{Diagonale}} \quad n: \text{Anzahl der Zeilenvertauschungen}$$

Bem: Bei LU-Zerlegung keine Vertauschungen!

2.3 $Ax=b$ via LU?

$$Ly=b$$

$$Ux=y$$

Aufgabe 3,4 gestrichen!

Sondern Aufgabentyp 73, 38, 32 (Pivotspalten)

Aufgabe 5.1 Determinante mit Gauß

obere Dreiecksmatrix $(-1)^n \cdot (a_{11} + a_{22} + a_{33})$ siehe Aufgabe 2.2

5.2 charakteristisches Polynom (Seite 179 Aufgabe 5)

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 1 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(8-\lambda) - 12 = 32 - 12\lambda + \lambda^2 - 12 = \lambda^2 - 12\lambda + 20$$

Quadratische Lösungsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{36 - 20}$$

$$\lambda_1 = 10 \quad \lambda_2 = 2$$

Aufgabe 6

6.1 Drehmatrix

Drehmatrix wenn:

- $\det(A) = 1$
- $A^t \cdot A = E$ das zeigt, dass $A^t = A^{-1}$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{u}{\|u\|} \text{ normierter Drehvektor}$$

6.3 $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$

$$\sin(\varphi) = \|u\|$$

$$\cos(\varphi) \rightarrow \text{Spur} : \text{tr}(A) = 2 \cdot \cos(\varphi) + 1$$

Aufgabe 7

7.1 Basis aus Eigenvektoren, Eigenwerten

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{21} & \dots \\ \lambda_1 v_{12} & \dots & \dots \\ \lambda_1 v_{13} & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ oder } A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1$$

7.2

$$A^x, x \in \mathbb{Q} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$A = V \cdot D \cdot V^{-1}$$

$$A^x = v \cdot D^x \cdot V^{-1}$$

Aufgabe 8 Spektralzerlegung

A Eigenwerte benötigt

8.1 $\lambda_1 = 144 \quad \lambda_{2,3} = 36$

$$P, Q \quad P = \frac{V_1 \cdot V_1^t}{\|V_1\|^2} \quad Q = E - P \quad A = \lambda_1 \cdot P + \lambda_{2,3} \cdot Q \text{ (Probe)} \quad A - \lambda E$$

Beispiel