1 Klausur SS08

Die stetige Zufallsvariable X besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot x^2(3-x) & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie a so, dass f_X tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(X < E\{X\})$?

a)

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^3 a \cdot x^2 \cdot (3-x)\, dx \\
&= a \cdot \int_0^3 3 \cdot x^2 - x^3\, dx \\
&= a \cdot \left[x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4\right]_0^3 \\
&= a \cdot ((3^3 - \frac{1}{4} \cdot 3^4) - (0^3 - \frac{1}{4} \cdot 0^4)) \\
&= a \cdot (3^3 - \frac{3^4}{4}) \\
&= a \cdot (\frac{4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^3}{4}) \\
&= a \cdot \frac{3^3}{4} \Longleftrightarrow a = \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

b-1)

$$f_X(x) = \frac{4}{27} \cdot x^2 \cdot (3-x)$$

b-2)

$$\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_0^3 x \cdot f_X(x)\, dx \\
&= \int_0^3 x \cdot \frac{4}{27} \cdot x^2 \cdot (3-x)\, dx \\
&= \frac{4}{27} \cdot \int_0^3 x^3 \cdot (3-x)\, dx \\
&= \frac{4}{27} \cdot \int_0^3 3 \cdot x^3 - x^4\, dx \\
&= \frac{4}{27} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{5} \cdot x^5\right]_0^3 \\
&= \frac{4}{27} \cdot ((\frac{3}{4} \cdot 3^4 - \frac{1}{5} \cdot 3^5) - (\frac{3}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{5} \cdot 0^5)) \\
&= \frac{4}{27} \cdot (\frac{3^5}{4} - \frac{3^5}{5}) \\
&= \frac{4}{27} \cdot \frac{5 \cdot 3^5 - 4 \cdot 3^5}{5 \cdot 4} \\
&= \frac{1}{3^3} \cdot \frac{3^5}{5} \\
&= \frac{3^2}{5} \\
&= \frac{9}{5} \\
&= 1{,}8
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
P(X < E\{X\}) &= \int_0^{1,8} f_X(x)\, dx \\
&= \int_0^{1,8} -\frac{4}{27} \cdot x^2 \cdot (3-x)\, dx \\
&= -\frac{4}{27} \cdot \int_0^{1,8} x^2 \cdot (3-x)\, dx \\
&= -\frac{4}{27} \cdot \left[x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4\right]_0^{1,8} \\
&= -\frac{4}{27} \cdot -(1{,}8^3 - \frac{1}{4} \cdot 1{,}8^4) \\
&= \frac{4}{27} \cdot \frac{4 \cdot 1{,}8^3 - 1{,}8 \cdot 1{,}8^3}{4} \\
&= \frac{4}{27} \cdot \frac{2{,}2 \cdot 1{,}8^3}{4} \\
&= \frac{1}{3^3} \cdot \frac{11}{5} \cdot \left(\frac{3^2}{5}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3^3} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{3^6}{5^3} \\
&= \frac{11}{5} \cdot \frac{3^3}{5^3} \\
&= \frac{11 \cdot 3^3}{5^4} \\
&= 0{,}4752 \\
&= 47{,}52\%
\end{aligned}$$

Die Ablenkeinheiten von Fernsehr@ohren werden einer sorgfltigen Endkontrolle unterzogen. Der automatisierte Kontrollvorgang weist die folgenden statistischen Parameter auf:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte Einheit als fehlerhaft erkannt wird, beträgt $0{,}98$;
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine intakte Einheit als fahlerhaft klassifiziert wird, beträgt $0{,}05$;
- 8% aller Einheiten sind fehlerhaft.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Eine zufällig der Produktion entnommene Ablenkeinheit wird als fehlerhaft deklariert.

b) Eine durch die Kontrolle als fehlerhaft eingestufte Ablenkeinheit ist tatsächlich intakt.

c) Eine durch die Kontrolle als defekt eingestufte Ablenkeinheit ist tatsächlich defekt.

d) Eine durch die Kontrolle als fehlerfrei eingestufte Ablenkeinheit ist defekt.

Ablenkeinheit = ALE

a)

X = ALE wird als defekt deklariert
I_d = intakte ALE wird als defekt deklariert
D_d = defekte ALE wird als defekt deklariert

$$\begin{aligned}
P(X) &= P(I_d) + P(D_d) \\
P(I_d) &= 0{,}92 \cdot 0{,}05 \\
&= 0{,}046 \\
&= 4{,}6\% \\
P(D_d) &= 0{,}08 \cdot 0{,}98 \\
&= 0{,}0784 \\
&= 7{,}84\% \\
P(X) &= 4{,}6\% + 7{,}84\% \\
&= 12{,}44\%
\end{aligned}$$

b)

X = intakt deklarierte ALE ist tatsächlich intakt
I_i = intakte ALE wird als intakt deklariert
D_i = defekte ALE wird als intakt deklariert

$$\begin{aligned}
P(X) &= \frac{P(I_i)}{P(I_i) + P(D_i)} \\
P(I_i) &= 0{,}92 \cdot 0{,}95 \\
&= 0{,}874 \\
&= 87{,}4\% \\
P(D_i) &= 0{,}08 \cdot 0{,}02 \\
&= 0{,}0016 \\
&= 0{,}16\% \\
P(X) &= \frac{87{,}4\%}{87{,}4\% + 0{,}16\%} \\
&\approx 0{,}9982 \\
&= 99{,}82\%
\end{aligned}$$

c)

X = defekt deklarierte ALE ist tatsächlich defekt
D_d = defekte ALE wird als defekt deklariert
I_d = intakte ALE wird als defekt deklariert

$$\begin{aligned}
P(X) &= \frac{P(D_d)}{P(D_d) + P(I_d)} \\
P(D_d) &= 0{,}08 \cdot 0{,}98 \\
&= 0{,}0784 \\
&= 7{,}84\% \\
P(I_d) &= 0{,}92 \cdot 0{,}05 \\
&= 0{,}046 \\
&= 4{,}6\% \\
P(X) &= \frac{7{,}84\%}{7{,}84\% + 4{,}6\%} \\
&\approx 0{,}6302 \\
&= 63{,}02\%
\end{aligned}$$

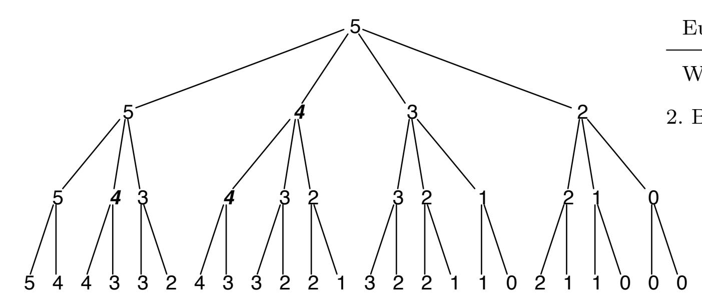
d)

X = defekte ALE wird als intakt eingestuft

$$\begin{aligned}
P(X) &= 0{,}08 \cdot 0{,}02 \\
&= 0{,}0016 \\
&= 0{,}16\%
\end{aligned}$$

Ein Spiel läuft in drei Runden ab. Sie starten mit einem Kapital von 5 EUR und verlieren in der ersten Runde mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{4}$ 0 oder 1 oder 2 oder 3 EUR. In der zweiten Runde verlieren Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{3}$ 0 oder 1 oder 2 EUR und in der dritten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 0 oder 1 EUR. 1. Skizzieren Sie alle möglichen Spielverläufe in einem Diagramm und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X = „Kapital nach Ablauf des Spiels" an. 2. Wie groß ist die Ruinwahrscheinlichkeit (Wachrscheinlichkeit bei einem Zwischenstand oder am Ende 0 EUR zu besitzen), der Erwartungswert und die bedingte Wahrscheinlichkeit nach dem Erreichen eines Zwischenstandes von 4 EUR (in der 1. und 2. Runde) am Ende genau 3 EUR zu besitzen?

2. Erwartungswert: $E\{X\} = 5 \cdot \frac{1}{24} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{5}{24} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{5}{24} + 0 \cdot \frac{1}{6}$
$= 2{,}041\bar{6}$
$\approx 2{,}04$ EUR



1. Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Euro	5	4	3	2	1	0
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$

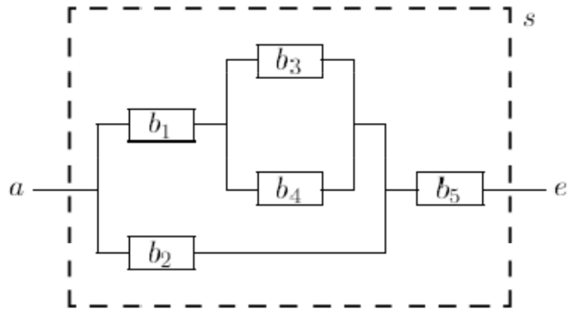
2. Bedingte Wahrscheinlichkeit (siehe fett gedruckte 4en):

$$P_{4_3} = \frac{\text{Anzahl der 3en nach einer 4}}{\text{Gesamtzahl aller Zahlen nach einer 4}} = \frac{3}{8}$$

2. Ruinwahrscheinlichkeit:

$$R = \frac{\text{Anzahl Nullen}}{\text{Anzahl aller Zwischen- und Endstände}} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Das folgende skizzierte System s, das aus den Bauteilen $b_1, b_2, \ldots, b_5$ besteht, fällt genau dann aus, wenn keine intakte Verbindung zwischen a und e besteht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass s intakt ist. Dabei können Sie davon ausgehen, dassdas Bauteil b_i mit der Wachrscheinlichkeit p_i ($i = 1, \ldots, 5$) ausfällt und dass der Ausfall eines Bauteils unabhängig vom Ausfall jeden anderen Bauteils erfolgt. Dabei gilt:



$p_1 = 0{,}2;\quad p_2 = 0{,}1;\quad p_3 = 0{,}3;\quad p_4 = 0{,}2;\quad p_5 = 0{,}3$

$$\begin{aligned}
X &= \text{„s ist intakt"} = ((b_1 \cap (b_3 \cup b_4)) \cup b_2) \cap b_5 \\
P(X) &= P(((b_1 \cap (b_3 \cup b_4)) \cup b_2) \cap b_5) \\
&= P(((b_1 \cap (b_3 \cup b_4)) \cup b_2)) \cdot P(b_5) \\
&= (P(b_1 \cap (b_3 \cup b_4)) + P(b_2) - P(b_1 \cap (b_3 \cup b_4)) \cdot P(b_2)) \cdot P(b_5) \\
&= (P(b_1) \cdot P(b_3 \cup b_4) + P(b_2) - P(b_1) \cdot P(b_3 \cup b_4) \cdot P(b_2)) \cdot P(b_5) \\
&= ((P(b_3 \cup b_4) \cdot (P(b_1) - P(b_1) \cdot P(b_2))) + P(b_2)) \cdot P(b_5) \\
&= ((P(b_3 \cup b_4) \cdot (P(b_1) \cdot (1 - P(b_2)))) + P(b_2)) \cdot P(b_5) \\
&= (((P(b_3) + P(b_4) - P(b_3) \cdot P(b_4)) \cdot (P(b_1) \cdot (1 - P(b_2)))) + P(b_2)) \cdot P(b_5) \\
&= ((((1-p_3) + (1-p_4) - (1-p_3) \cdot (1-p_4)) \cdot ((1-p_1) \cdot (1 - (1-p_2)))) + (1-p_2)) \cdot (1-p_5) \\
&= (((0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8) \cdot (0{,}8 \cdot (1 - 0{,}9))) + 0{,}9) \cdot 0{,}7 \\
&= (((1{,}5 - 0{,}56) \cdot (0{,}8 \cdot 0{,}1)) + 0{,}9) \cdot 0{,}7 \\
&= ((0{,}94 \cdot 0{,}08) + 0{,}9) \cdot 0{,}7 \\
&= (0{,}0752 + 0{,}9) \cdot 0{,}7 \\
&= 0{,}9752 \cdot 0{,}7 \\
&= 0{,}68264 \\
&\approx 68{,}26\%
\end{aligned}$$

In einer Glasschmelze wird Sand aus zwei Sandgruben (A bzw. B) verwendet, deren jeweiliger Verunreinigungsgrad X (in 0,1%) unabhängig voneinander normalverteilt ist mit

$$X_Y \sim N(70, 4^2) \text{ und } X_B \sim N(72, 3^2)$$

Für einen neuen Auftrag darf der Verunreinigungsgrad des Sandes 7,4% nicht überschreiten. Den Sand aus welcher Sandgrube sollte man verarbeiten, um eine Wahrscheinlichkeit für die Überschreitung des Verunreinigungsgrades so klein wie möglich zu halten (Begründen Sie durch eine geeignete Berechnung)?
Es besteht die Möglichkeit, beide Sandsorten 1:1 zu mischen. Ist es besser, diese Mischung zu benutzen? Auch hier begründen Sie ihre Antwort durch eine geeignete Berechnung.

a)

$P(X > 74)$muss minimal sein, oder$P(X \le 74)$maximal..

$$P(X > 74) = 1 - P(X \le 74)$$

$$P(X_A \le 74) = \Phi\left(\frac{74-70}{4}\right) = \Phi(1) = 0{,}84134$$

$$P(X_B \le 74) = \Phi\left(\frac{74-72}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}74537 \Rightarrow \text{Grube A ist reiner}$$

b) $\frac{72+70}{2} = 71$; $\frac{4+3}{2} = 3{,}5 \Rightarrow \Phi\left(\frac{74-71}{3,5}\right) < \Phi(1) \Rightarrow$ Grube A ist immernoch reiner